

Задаци - девета недеља

задаци са * су посебно важни

1. * Дати пример функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која је непрекидна, а није равномерно непрекидна. Да ли постоји такав пример ако претпоставимо да је домен функције $Dom(f) = [0, 1] \cup [3, 4]$?
2. * Доказати да је $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрекидна.
3. Доказати да је непрекидна функција $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$ равномерно непрекидна.
4. Нека је дата непрекидна функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Доказати да су функције $M, m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, задате са

$$M(x) := \max_{t \in [a, x]} f(t), \quad m := \min_{t \in [a, x]} f(t)$$

непрекидне. Да ли су и равномерно непрекидне?

5. Нека је $\alpha \in (0, 1]$ и $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција за коју постоји $C > 0$ тако да за свако $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha. \quad (1)$$

Доказати да је f равномерно непрекидна.¹

¹Функције које задовољавају (1) се називају α -Хелдеровим функцијама. Специјално, кад је $\alpha = 1$ функција се назива Липшицовом функцијом.